

УДК 539.37

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛАСТИКИ СТЕРЖНЯ В РАЗНОВИДНОСТЯХ ПЛОСКОГО ИЗГИБА (СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НАГРУЗКА)

А.В. Анфилофьев

Томский политехнический университет

E-mail: zvm@tpu.ru

Упругий стержень в продольном изгибе сосредоточенной нагрузкой при больших искривлениях представлен как совокупность стержней, находящихся в различных видах изгиба. Сформирована общая расчётная схема для исследования влияния ориентации нагрузки на геометрию упругих кривых. Установлено, что в некоторых пределах форма кривых практически не зависят от направления нагрузки. Это позволяет определить границы, в которых имеет место понятие «малости» в положениях традиционной теории изгиба. Установлены свойства линии с линейно изменяемой кривизной и дано её соответствующее геометрическое представление. Сформирована диаграмма состояний стержня в диапазоне искривлений от центрального сжатия до центрального растяжения.

Ключевые слова:

Кривизна, функция кривизны, эластика, стержень, сосредоточенная нагрузка, разновидности изгибов.

1. Введение

В теории изгиба задача определения геометрии оси деформируемого стержня (задача элаستي) формулируется как «восстановление линии по заданной функции изменения кривизны». Кривизна, по определению, характеризуется скоростью изменения угла наклона касательной θ при движении по длине L искомой линии $y(x)$ и выражается аналитически в естественной и координатной форме:

$$K = \frac{d\theta}{dL} = \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (1)$$

Функцию изменения кривизны даёт теория изгиба уравнением Я. Бернулли:

$$K^* = M/EJ. \quad (2)$$

Здесь M – функция изгибающих моментов, обусловленная нагрузкой, EJ – изгибная жесткость стержня.

Согласно (1) и (2) задача восстановления линии формируется уравнением:

$$\frac{d\theta}{dL} = K^* \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} = K^*. \quad (3)$$

Искривление прямого стержня может явиться результатом нагрузки разного направления по отношению к нему и, очевидным образом, сформировано представление о разных видах его изгиба, рис. 1.

Стержни, для которых требование жёсткости ставит ограничения на величину искривления, являются объектом исследования теории изгиба «малых» перемещений. Используется упрощенное Л. Эйлером аналитическое выражение кривизны в

координатной форме (1), с которым ур. (3) принимает вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx K^*. \quad (4)$$

В этой теории систему координатных осей всегда связывают с осью стержня в начальном недеформированном состоянии. Функция кривизны K^* устанавливается без учёта искривления оси или с его учётом при наличии продольных сил. Соответственно, различают теории продольного, поперечного, продольно-поперечного изгиба.

Искривление длинных и гибких стержней устанавливается по (3) и они являются объектом исследований теории «больших» перемещений [1, 2]. Основная её сложность состоит в согласовании функции K^* с выражениями кривизны [3].

Для искривлённых стержней в системе осей, связанной с направлением нагрузки, представление о разных изгибах исчезает, и становится очевидной общность между ними. Она имеет визуализацию в эластике стержня в продольном изгибе возрастающей сосредоточенной нагрузкой при разных углах поворота концевой сечения, рис. 2.

Одна из кривых, рис. 2, приведена на рис. 3. На этой линии указаны отрезки, которые представляют стержни в разных изгибах. Из совокупности кривых, рис. 2, можно выделить короткие (жёсткие) и длинные (гибкие) стержни при любом направлении нагрузки к их первоначальной оси.

Если в системе осей, связанных с начальной осью стержня, функции кривизны (2) для выделенных отрезков определяются разными уравнениями, то в системе осей x, y , связанных с направлением

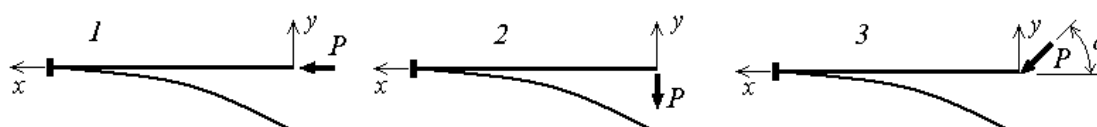


Рис. 1. Разновидности плоского изгиба стержня сосредоточенной нагрузкой P : 1) продольный, 2) поперечный, 3) продольно-поперечный

ем нагрузки, она одинакова для любого из них и упругие кривые их есть отрезки эластике стержня в продольном изгибе. Концы стержней определяют граничные условия его в соответствующем изгибе и, следовательно, все разновидности изгибов можно определить одной расчётной схемой.

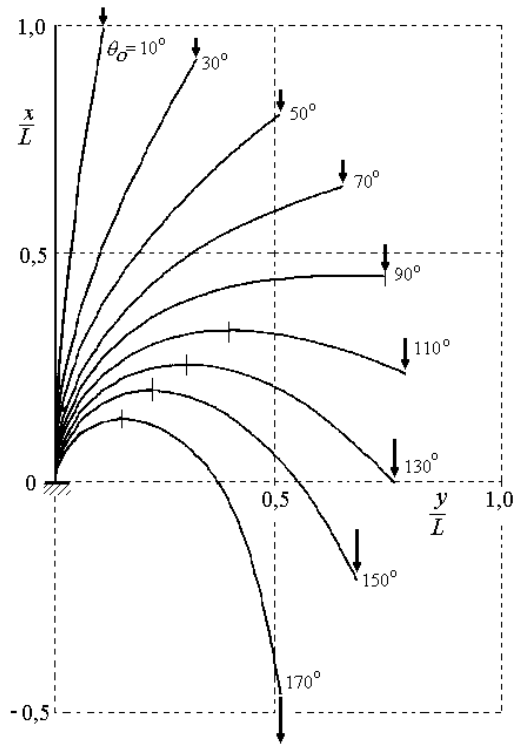


Рис. 2. Эластика стержня в продольном изгибе

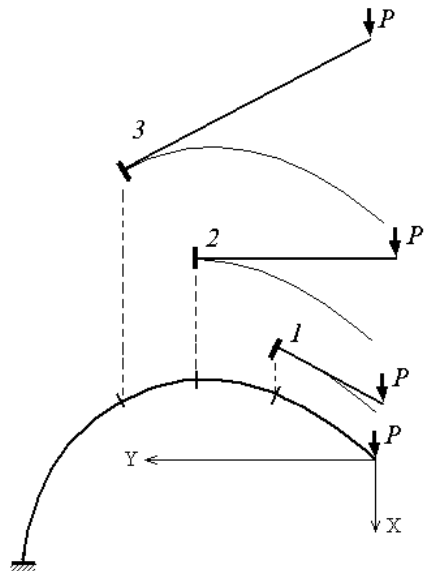


Рис. 3. Разновидности изгибов стержня в кривой продольного изгиба: 1) с растяжением, 2) поперечный, 3) со сжатием

Цель работы – установление особенностей геометрии искривления оси стержня в отмеченном едином представлении разновидностей его изгиба.

2. Расчётная схема разновидностей изгиба стержня

На рис. 4 состояние стержня определяется нагрузкой неизменного направления к его оси указанного углом α . Изменением этого угла в диапазоне $0...180^\circ$ реализуются все возможные изгибы от центрального сжатия до центрального растяжения.

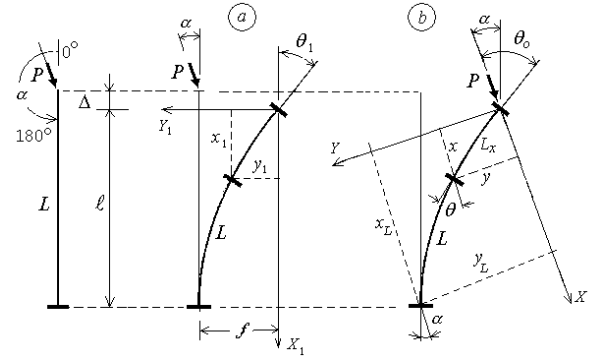


Рис. 4. Изгиб стержня нагрузкой произвольного направления. Система осей связана: а) с начальной осью стержня, б) с направлением нагрузки

В системе осей X_1, Y_1 (рис. 4, а) стержень от нагрузки с направлением $\alpha \neq 0$ искривляется. При этом «малые» перемещения точек упругой кривой можно устанавливать по ур. (4). Если перемещения являются «большими» они должны определяться по ур. (3). В системе осей X, Y (рис. 4, б), связанной с направлением нагрузки, даже «малые» перемещения становятся «большими».

Для решения поставленной задачи используем точные выражения кривизны в параметрической форме [4]:

$$K = \pm \frac{d(\sin \theta)}{dx} = \mp \frac{d(\cos \theta)}{dy}. \quad (5)$$

Задача восстановления линии L с функцией изменения кривизны $K^* = py$, где коэффициент $p = P/EJ$ ($EJ = \text{const}$) формулируется уравнениями:

$$\frac{d(\cos \theta)}{dy} = py, \quad -\frac{d(\sin \theta)}{dx} = py, \quad dL = \frac{dx}{\cos \theta}. \quad (6)$$

Граничные условия: в начале координат $x=0, y=0, \theta=\theta_0=\alpha+\theta_1$, на конце линии $x=x_L, y=y_L, \theta=\alpha$. Здесь θ_1 – поворот конечного сечения относительно своего исходного положения.

Из первого дифференциального уравнения (6) получаем уравнение ординат точек кривой:

$$y = \sqrt{\frac{2}{p} (\cos \theta - \cos \theta_0)}. \quad (7)$$

Из второго дифференциального уравнения (6) при подстановке (7) находим уравнение абсцисс:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \theta_0)^{1/2}}. \quad (8)$$

По третьему уравнению (6) определяется длина кривой от её начала до точки с координатами x, y, θ :

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(\cos \theta - \cos \theta_0)^{1/2}}. \quad (9)$$

Полная длина кривой L и её проекции на оси устанавливаются по координатам её конца.

С преобразованием $\cos \theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ ур. (8), (9) принимают вид:

$$x\sqrt{p} = -\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{[1 - \sin^2(\theta/2)] d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}, \quad (10)$$

$$L_x\sqrt{p} = -\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}. \quad (11)$$

При замене $\sin(\theta_0/2) = k$, $\sin \varphi = \sin(\theta/2)/k$ ур. (10) и (11) выражаются нормальными эллиптическими интегралами первого и второго рода:

$$x\sqrt{p} = [F(\varphi_0, k) - F(\varphi_0, k)] - 2[E(\varphi_0, k) - E(\varphi_0, k)],$$

$$L\sqrt{p} = [F(\varphi_0) - F(\varphi_0, k)],$$

где

$$\varphi_0 = \arcsin \left[\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} \right], \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_\alpha = \arcsin \left[\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} \right].$$

Полные интегралы $F(\varphi_0, k)$ и $E(\varphi_0, k)$ определяются углом поворота сечения стержня в начале координат θ_0 , неполные $F(\varphi_0, k)$ и $E(\varphi_0, k)$ зависят от θ_0 и переменного угла θ в диапазоне $\theta_0 \dots \alpha$. Для краткости приняты обозначения:

$$F(\varphi_0, k) = F_{\theta_0}, \quad F(\varphi_0, k) = F_\theta,$$

$$E(\varphi_0, k) = E_{\theta_0}, \quad E(\varphi_0, k) = E_\theta.$$

Ур. (7), (8) в относительных величинах имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{L} &= \frac{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}{F_{\theta_0} - F_\alpha}, \\ \frac{x}{L} &= \frac{1}{F_0 - F_\alpha} [(F_\theta - F_{\theta_0}) - 2(E_\theta - E_{\theta_0})]. \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

$$L\sqrt{p} = [F_{\theta_0} - F_\alpha]. \quad (13)$$

3. Геометрия упругих кривых изгибаемого стержня

Координаты точек кривых (12) устанавливаются по углу наклона касательных θ . В системе координат, связанной с начальной осью стержня (рис. 4, а), они находятся поворотом осей на угол α :

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

На рис. 5 представлены линии разной искривлённости при разных углах направления нагрузки α к первоначальной оси стержня для разных углов поворота его концевой сечения θ_1 .

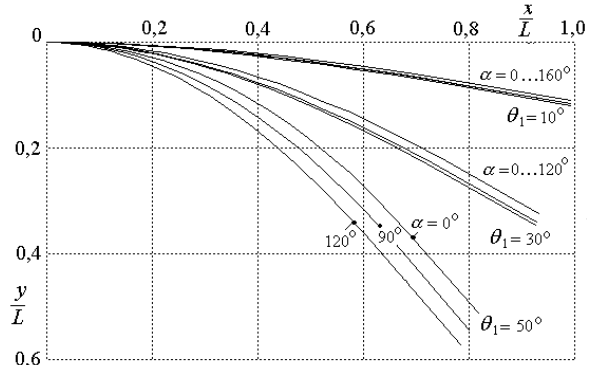


Рис. 5. Искривления стержня при изменении направления сосредоточенной нагрузки в системе осей, связанной с начальной осью стержня

Геометрически упругие линии в широком диапазоне изменения направления нагрузки одинаковы и приобретают отличие в количественных оценках только при значительных искривлениях. Искривление линий практически не зависит от направления нагрузки в диапазоне изменения угла $\alpha = 0 \dots 160^\circ$ при взаимном повороте её концов до $\theta_0 - \alpha = \theta_1 \approx 10^\circ$. Все линии близки в смысле близости нулевого порядка и, по этому признаку, такие искривления можно определить как «малые» в очевидных допущениях.

Так, если $\sin(\theta/2) \approx \theta/2$, то интегралы (10) и (11) выражаются элементарными функциями:

$$x\sqrt{p} = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\theta}{\theta_0} \right) \left(1 - \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{\theta}{4} \sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}, \quad (14)$$

$$L_x\sqrt{p} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\theta}{\theta_0}. \quad (15)$$

При $\alpha = 0$ угол $\theta_0 = \theta_1$ и функции (7), (14), (15) определяют кривую продольного изгиба стержня и, согласно рис. 5, этой кривой можно определить линии «малой» искривлённости стержня в разных изгибах.

В системе координат, связанных с осью стержня, его свободный конец имеет самые большие перемещения: поперечное f , продольное Δ и угловое θ_1 . Эти перемещения в совокупности определяют геометрию деформирования. На рис. 6 показаны их связи.

Можно отметить, что линейные перемещения до значительных искривлений практически не зависят от направления нагрузки. Для «малых» искривлений из (7), (14), (15) следуют соответствующие элементарные выражения этих связей:

$$\frac{f}{L} \approx \frac{2}{\pi} \theta_1, \quad \frac{\Delta}{L} \approx \frac{1}{4} \theta_1^2. \quad (16)$$

Формулы (16) позволяют по углу поворота концевой сечения определить его линейные перемещения для стержня в разных изгибах в системе координат, связанных с осью стержня.

Так, при $\theta_1 = 10^\circ$ из (16) следуют значения: $f/L = 0,1111$, $\Delta/L = 0,0076$ с погрешностью относительно точных значений, определяемых по уравне-

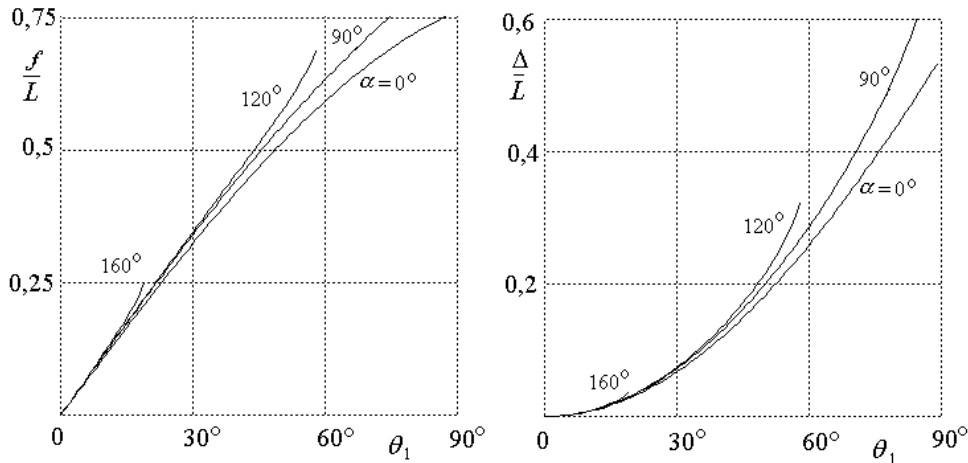


Рис. 6. Линейные перемещения свободного конца стержня в системе, связанной с начальной осью стержня, в зависимости от его угла поворота

ниям (12) и (13), для продольного изгиба стержня $-0,065\%$, $-0,124\%$, для поперечного изгиба $-4,02\%$, $-0,128\%$.

Обратим внимание на сформированное теорией «малых» перемещений представление о незначительности продольных смещений конца стержня Δ при разных изгибах. Допущением $dx \approx dL$ они исключаются из анализа, как величины второго порядка малости. Реальное представление об этих величинах даёт соотношение между линейными перемещениями, рис. 7. Отношение их практически линейно связано с углом поворота сечения и, согласно (16), для «малых» искривлений определяется формулой

$$\frac{\Delta}{f} \approx \frac{\pi}{8} \theta_1.$$

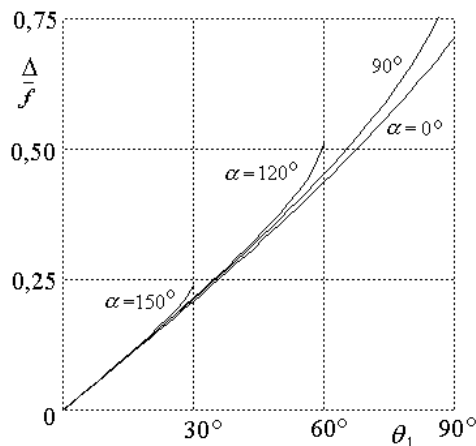


Рис. 7. Соотношение между линейными перемещениями концевого сечения стержня в зависимости от его углового перемещения

4. Геометрические свойства кривой с линейно изменяемой кривизной

Как следует из уравнений (6) кривая продольного изгиба является линией с линейно изменяю-

щейся кривизной. Согласно представлениям рис. 3, эта линия имеет определяющее значение в геометрии деформирования стержня в разновидностях изгиба, однако свойства её практически не изучены. Она изображается по вычисленным точкам; в эксперименте наблюдается её форма, но она не имеет образа, которые создают линии, выраженные в элементарных функциях.

Существует единственная интерпретация этой кривой – «аналогия Кирхгофа», основанная на схожести упрощенного дифференциального уравнения кривой для продольного изгиба (4) и уравнения колебаний маятника. Угол наклона касательной к линии, когда точка касания движется по ней с постоянной скоростью, меняется точно так же, как и угол отклонения маятника при движении от одной крайней точки к другой.

Формулы кривизны (5) позволяют установить её некоторые геометрические свойства, рис. 8.

Так, из второго ур. (6) при начальных условиях $x=0$, $y=0$, $\theta=\theta_0$ непосредственно следует:

$$\sin \theta_0 - \sin \theta = p \int_0^x y dx = p \omega_x.$$

Здесь $ydx=d\omega$ есть элемент площади фигуры, образуемой кривой и её проекцией на ось координат, ω_x – площадь фигуры от начала координат до её произвольной точки.

$$\sin \theta = \sin \theta_0 - p \omega_x. \quad (17)$$

Ур. (18) позволяет отметить одно геометрическое свойство кривой: синус угла наклона касательной к линии изменяется пропорционально изменению площади, заключённой между линией и её проекцией на ось абсцисс.

Из ур. (7) следует:

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = p \frac{y^2}{2}. \quad (18)$$

Осуществим координатное представление ур. (17) и (18), для чего возведём их в квадрат и сложим

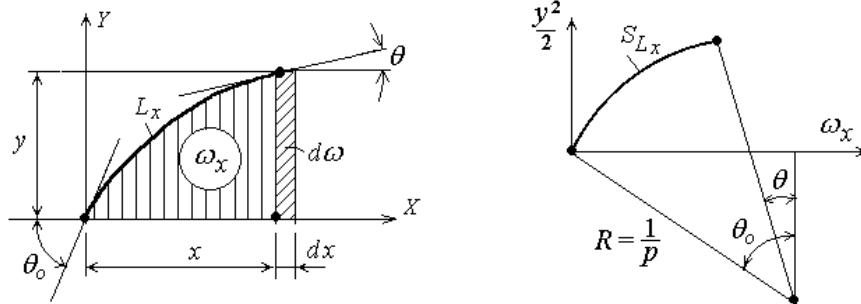


Рис. 8. Геометрические свойства линии с кривизной $K^*=py$

$$\left[\omega_x - \frac{\sin \theta_0}{p} \right]^2 + \left[\frac{y^2}{2} + \frac{\cos \theta_0}{p} \right]^2 = \left(\frac{1}{p} \right)^2. \quad (19)$$

В координатах $y^2/2$ и ω_x ур. (19) определяет дугу окружности радиусом $1/p$ с центральным углом $(\theta_0 - \theta)$. Длина её при этом равна статическому моменту длины кривой L_x относительно оси X . Действительно, по определению, её статический момент есть:

$$S_{L_x} = \int_0^{L_x} y dL = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{y dy}{\sin \theta},$$

где из ур. (6) следует

$$y dy = \frac{d(\cos \theta)}{p} = -\frac{\sin \theta d\theta}{p}, \quad \frac{y dy}{\sin \theta} = -\frac{d\theta}{p}$$

и, следовательно,

$$S_{L_x} = -\frac{1}{p} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{1}{p} (\theta_0 - \theta). \quad (20)$$

В геометрическом представлении, рис. 8, стержни в разных изгибах сосредоточенной нагрузкой изображены на рис. 9.

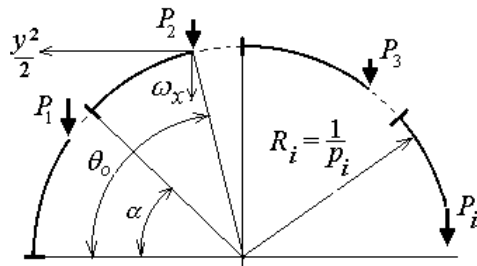


Рис. 9. Разновидности изгибов стержня

Для линии конечной длины, определяемой углами θ_0 и α , площадь фигуры ограниченной искривлённой линией и её проекцией на ось абсцисс по (17) выражается как:

$$\omega_L = \frac{\sin \theta_0 - \sin \alpha}{p}. \quad (21)$$

Статический момент линии относительно этой оси по (20)

$$S_L = \frac{\theta_0 - \alpha}{p}. \quad (22)$$

Согласно (21) и (22) такая линия обладает следующим геометрическим свойством:

$$\frac{\omega_L}{S_L} = \frac{\sin \theta_0 - \sin \alpha}{\theta_0 - \alpha}.$$

При «малых» искривлениях, когда $\sin \theta \approx \theta$, $\omega_L \approx S_L$.

По (21) можно установить нагрузку для упругой кривой, определённой экспериментально:

$$p = \frac{\sin \theta_0 - \sin \alpha}{\omega_L}. \quad \text{В эксперименте необходимо}$$

определять в системе осей, связанных с направлением нагрузки, углы поворота концевых сечений и площадь, ограниченную линией и её проекциями.

5. Диаграмма состояний стержня в разновидностях изгиба

За основную зависимость, определяющей состояние деформируемых тел, обычно принимается связь нагрузки с перемещением, которое считается «характерным». Для деформируемых стержней им является самое большое линейное перемещение.

Поперечный изгиб стержня и его теория «малых» перемещений, как основная теория плоского изгиба, сформировали представление, что и при любом изгибе таким перемещением является самое большое поперечное смещение (стрела прогиба).

Пропорциональность роста стрелы прогиба с увеличением нагрузки стала признаком геометрической линейности. В других видах изгиба поведение стержня, оцениваемое по такой зависимости, нарушает это представление. Продольный изгиб традиционно ассоциируется с потерей устойчивости.

Аналитическим решением устанавливается искривлённая линия конечной длины по функционально заданной кривизне стержня, и только уравнение Я. Бернулли (2) придаёт физический смысл задаче. Очевидно, необходимо различать решение математической задачи и его физические интерпретации.

Структура ур. задачи (6) определяет основную переменную – угол наклона касательной к линии (угловая координата). Искривление определяется взаимным поворотом концов $\theta_0 - \alpha = \theta$. Коэффици-

ент « p » функции изменения кривизны $K^*=p$ получает значение при заданной длине линии по угловым координатам концов в системе осей, связанной с нагрузкой. Эта связь определена (13) и представлена на рис. 10 диаграммой, которую можно трактовать как диаграмму состояний стержня, рис. 4.

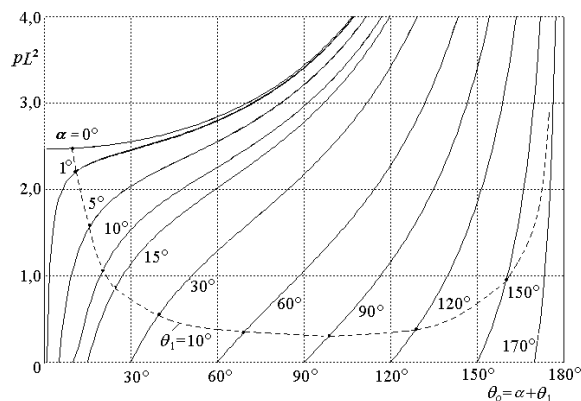


Рис. 10. Диаграмма состояний стержня в плоском изгибе: --- — граница $\theta_1 \approx 10^\circ$, разделяющая «малые» и «большие» искривления

Диаграмма включает все виды изгиба стержня от центрального сжатия до центрального растяжения. Сверху все состояния ограничены зависимостью (13) для продольного изгиба. Штриховая линия разделяет в соответствии с рис. 5 «малые» перемещения от «больших». Она же указывает значения нагрузок разных направлений к оси стержня практически одинаковой искривлённости при взаимном повороте концов на угол $\theta_0 - \alpha = \theta_1$. Графически представленная связь «нагрузка — угол поворота» позволяет судить о геометрической линейности или нелинейности поведения стержня и устойчи-

вости или неустойчивости при соответствующих нагрузках.

Выводы

1. В системе координатных осей, связанных с направлением нагрузки, «малые» и «большие» искривления стержня с линейной функцией кривизны во всех разновидностях изгиба имеют единое аналитическое и графическое представление.
2. Искривление стержня при повороте одного конечного сечения относительно другого на угол $\leq 10^\circ$ практически не зависят от направления нагрузки. Линии этой искривлённости являются близкими в смысле близости нулевого порядка, и по этому признаку такое искривление определяет понятие «малости» традиционной теории изгиба.
3. Параметрическое выражение кривизны плоских линий позволяет установить их геометрические свойства и признаки, а также дать геометрическую иллюстрацию эластичности стержня в разновидностях изгиба дугой окружности в соответствующих координатах.
4. Основной переменной в анализе геометрии деформирования изгибаемых стержней является поворот поперечных сечений. Соответственно, основной функциональной зависимостью, характеризующей искривление стержня конечной длины, является связь коэффициента функции кривизны (параметр нагрузки) с углами поворота его конечных сечений. Диаграммное представление этой связи даёт полную информацию для заключения о состоянии стержня и его поведении под нагрузкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Е.П. Теория и расчёт гибких упругих стержней. — М.: Наука, 1986. — 294 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 1. Статика. — М.: Высшая школа, 1987. — 320 с.
3. Анфилофьев А.В. Определение формы упругой линии гибкого стержня при заданном законе изменения её кривизны // Известия вузов. Машиностроение. — 2000. — № 4. — С. 17–22.
4. Анфилофьев А.В. Теории «малых» и «больших» искривлений стержней в общем аналитическом представлении // Известия Томского политехнического университета. — 2007. — Т. 310. — № 2. — С. 55–59.

Поступила 15.05.2008 г.